ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα 1

Α.α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας την παρακάτω πρόταση και να συμπληρώσετε τα κενά που υπάρχουν.

« Αν το σημείο Α είναι η εικόνα του αριθμού α πάνω σε έναν άξονα τότε την απόσταση του σημείο Α από την αρχή Ο του άξονα την ονομάζουμε …..... ……..... του αριθμού α και τη συμβολίζουμε με ….. . Η …..... ……..... είναι πάντοτε αριθμός …….. ή ……. του 0. Μονάδες 10

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha-2|+\sqrt{\beta+3}=0$ τότε $\alpha=2$ και $\beta=-3$.

Μονάδες 3

ii. Ισχύει η ισότητα $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ Μονάδες 3

iii. Οι ευθείες $y=2x+3$ και $2y=x+3$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Μονάδες 3

iv. Το σύστημα $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση που είναι το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: x-2y=1$ και $\varepsilon_2: 2x-4y=4$.

Μονάδες 3

v. Η εξίσωση $2008x^2+2009x-2010=0$ με άγνωστο το x έχει για δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 3

Θέμα 2

α) Να αποδείξετε ότι $3<2\sqrt{7}$. Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $\left(3+2\sqrt{7}\right)^2$ και $\left(3-2\sqrt{7}\right)^2$ Μονάδες 5

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{37+12\sqrt{7}}+\sqrt{37-12\sqrt{7}}$.

Μονάδες 15

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + (3+\lambda)x + \mu$ όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1, -3)$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 3$ και $\mu = -8$

Μονάδες 15

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = x - 4$ λύνοντας το σύστημά τους..

Μονάδες 5

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

Μονάδες 5

Δίνεται ότι κορυφή της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι το σημείο

$$M\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

Θέμα 4

α) Να χαρακτηρίσετε την πρόταση που ακολουθεί, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος.**

« Η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς ρ_1 και ρ_2 είναι η $x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2 = 0$»

Μονάδες 5

β) Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές η οποία να έχει ως ρίζα τον αριθμό $2 - \sqrt{3}$.

Μονάδες 15

γ) Αν . ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του β ερωτήματος να υπολογίσετε τον αριθμό $\rho_1^3 + \rho_2^3$. Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
3. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο διευθυντής Ο εισηγητής

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα 1

Α.α) Αν το σημείο Α είναι η εικόνα του αριθμού α πάνω σε έναν άξονα τότε την απόσταση του σημείο Α από την αρχή Ο του άξονα την ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και τη συμβολίζουμε με $|\alpha|$. Η **απόλυτη τιμή** είναι πάντοτε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 0.

Μονάδες 10

β) i. Σωστή
ii. Σωστή
iii. Λάθος
iv. Λάθος
v. Σωστή

Θέμα 2

α) Είναι $3 < 2\sqrt{7} \Leftrightarrow 3^2 < \left(2\sqrt{7}\right)^2 \Leftrightarrow 9 < 4\cdot 7$ που ισχύει.

β) Είναι

$$\left(3+2\sqrt{7}\right)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{7} + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 9 + 12\sqrt{7} + 28 = 37 + 12\sqrt{7}$$

και

$$\left(3-2\sqrt{7}\right)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{7} + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 9 - 12\sqrt{7} + 28 = 37 - 12\sqrt{7}$$

γ) Είναι $\sqrt{37+12\sqrt{7}} + \sqrt{37-12\sqrt{7}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-2\sqrt{7}\right)^2}$

$$= \left|3+2\sqrt{7}\right| + \left|3-2\sqrt{7}\right| = \left(3+2\sqrt{7}\right) - \left(3-2\sqrt{7}\right) = 4\sqrt{7}$$

Θέμα 3

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ άρα $-\frac{\beta}{2\alpha} = 3 \Leftrightarrow -\frac{3+\lambda}{-2} = 3 \Leftrightarrow \lambda = 3$ και διέρχεται από το $M(1,-3)$ άρα $f(1) = -3 \Leftrightarrow -1 + (3+3)1 + \mu = -3 \Leftrightarrow \mu = -8$.

β) Είναι $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 8 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 = x - 4 \\ y = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ή } x = 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Για x = 1 είναι y = 3 άρα κοινό σημείο το Α(1,3) και για x = 4 είναι y =0 άρα κοινό σημείο το Β(4, 0)

γ) Είναι $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. Ρίζες της f είναι οι αριθμοί 2 και 4 άρα

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	

Θέμα 4

α) Σωστή.

β) Η άλλη ρίζα της εξίσωσης πρέπει να είναι η $2+\sqrt{3}$. Οι ρίζες έχουν άθροισμα

$$\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)=4$$

και γινόμενο

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=4-3=1$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-4x+1=0$

γ) Είναι $\rho_1^3+\rho_2^3=\left(\rho_1+\rho_2\right)^3-3\rho_1\cdot\rho_2\left(\rho_1+\rho_2\right)=4^3-3\cdot1\cdot4=52$