

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι ίση με 0.

Μονάδες 8

B. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	<i>Στήλη I</i>		<i>Στήλη II</i>
α	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A,B	1	$A \cap B$
β	Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$A \cup B$
		4	$A \cup B$

Στη **Στήλη II** περισεύει μία σχέση

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσεις x_i	Συχνότητα v_i σε χιλ. οχημ.	Σχετική συχνότητα f_i %	Αθροιστική συχνότητα N_i σε χιλ. οχ.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i %
[5,15)		60			
[15,25)					68
[25,35)				180	
[35,45)					
Σύνολο		200			

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών. **Μονάδες 10**

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $\alpha_{i,f_i\%}$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} . **Μονάδες 5**

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$ **Μονάδες 9**

Β. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i) $P(A \cap B)$

ii) $P(A - B)$

iii) $P[(A \cap B)^c]$

$P(A - B) \cup P(B - A)$

Μονάδες 16

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Σχ. βιβλ. σελ. 28

Β. Σχ. βιβλ. σελ. 16

Γ. α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό

Δ. α. 4 β. 2 γ. 1

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Πρέπει $\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0$ άρα $\sqrt{x} \neq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq 3$ (1)

και $x \geq 0$ (2)

Από τη συναλήθευση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $A = [0,3) \cup (3,+\infty)$

Β. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ είναι: $\alpha = 4$, $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Άρα $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ (3). Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x-1)(x-3)}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} + \sqrt{3})(x-1) = 4\sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α.

Κλάσεις σε χιλμ.	Κέντρο κλάσεις x_i	Συχν. v_i σε χιλ. οχ.	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθρ. Συχν. N_i σε χιλ. οχ.	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i\%$	$x_i v_i$
[5,15)	10	60	30	60	30	600
[15,25)	20	76	38	136	68	1520
[25,35)	30	44	22	180	90	1320
[35,45)	40	20	10	200	100	800
Σύνολο		200	100			4240

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{60}{200} \cdot 100 = 30, N_1 = v_1 = 60, F_1\% = f_1\% = 30$$

$$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 60 - 30 = 38, v_2 = f_2 \cdot v = \frac{38}{100} \cdot 200 = 76, N_2 = v_1 + v_2 = 60 + 76 = 136$$

$$v_3 = N_3 - N_2 = 180 - 136 = 44 \quad f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{44}{200} \cdot 100 = 22$$

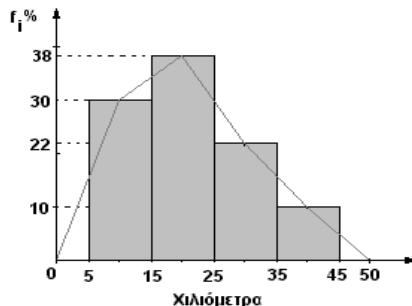
$$F_3\% = F_2\% + f_3\% = 68 + 22 = 90, \quad N_4 = v = 200$$

$$v_4 = N_4 - N_3 = 200 - 180 = 20$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{20}{200} \cdot 100 = 10$$

$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = 90 + 10 = 100$$

B.



$$\Gamma. \bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ km}$$

Δ. Το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25km είναι $\kappa = v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$ χιλιάδες οχήματα.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0, \Delta = 1 \text{ και } x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} = x_1 \\ \frac{1}{3} = x_2 \end{cases}, f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 > 0$$

Οπότε: $x < \frac{1}{3}$ ή $x > \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{cccc} -\infty & 1/3 & 1/2 & +\infty \\ + & \ominus & - & \oplus \end{array}$$

x	$-\infty$	$1/3$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\ominus	$-$	\oplus
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow
		T.M $f(1/3)$	T.E. $f(1/2)$	

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών:

Η f παρουσιάζει για $x = \frac{1}{3}$ τοπικό μέγιστο και για $x = \frac{1}{2}$ τοπικό ελάχιστο. Άρα

$$P_{\text{max}} = \frac{1}{2} \text{ και } P_{\text{min}} = \frac{1}{3}.$$

B.

i) Ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ή

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

ii) Ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

iii) Ισχύει $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

iv) Επειδή $A - B, B - A$ είναι ασυμβίβιστα ενδεχόμενα ισχύει:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$= P(A - B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

ΚΡΙΤΙΚΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα θέματα χαρακτηρίζονται εύκολα. Είναι καλά διατυπωμένα και δεν αναμένεται να δυσκολέψουν τους διαβασμένους μαθητές. Δεν υπάρχει το θέμα στο οποίο θα ξεχωρίσουν οι άριστοι.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΑΛΑΡΗΣ Γ. – ΠΑΥΛΟΥ Φ. – ΣΠΥΡΟΥ Χ