Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

Μονάδες 7

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xy+x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(-γ,0), Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ όπου } \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\ .$$

Μονάδες 2

δ. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\ .$$

Μονάδες 2

Γ. **α.** Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, πότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha\in\mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή $\alpha^3 = 8k$ όπου $k\in\mathbf{Z}$ ή $\alpha^3 = 2k+1$ όπου $k\in\mathbf{Z}$.

Μονάδες 12

Β. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

Β΄ ΤΑΞΗ

Μονάδες 13

Β΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq-2$.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Β. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0,\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $E'\left(0,-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2},p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2},-p\right)$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2},p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, να γίνουν με στυλό διαρκείας (μπλε ή μαύρο).
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Β΄ ΤΑΞΗ

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά την 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία βιβλίου σελ. 45

Β. α. σωστό
β. λάθος
γ. σωστό
δ. λάθος

Γ. α. Ορισμός σελ. 146
β. Ορισμός σελ. 89

Θέμα 2ο

Έστω $\alpha \in Z$

Α. Αν ο άρτιος $\Rightarrow \begin{cases} a = 2\lambda \\ \kappa \in Z \end{cases} \Rightarrow \alpha = (2\lambda)^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8\kappa \\ \kappa \in Z \end{cases}$$

Αν α περιττός $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\lambda + 1 \\ \lambda \in Z \end{cases}$

Τότε $\alpha^3=(2\lambda+1)^3=8\lambda^3+3\cdot 4\lambda^2\cdot 1+3\cdot 2\lambda\cdot 1+1=$
$=8\lambda^3+12\lambda^2+6\lambda+1=$
$=2\underbrace{(4\lambda^3+6\lambda^2+3\lambda)}_{\kappa\in Z}+1=2\kappa+1$

Β. Είναι $\alpha(\alpha^2+1)=\alpha^3+\alpha$

Αν ο άρτιος τότε $\alpha(\alpha^2+1)=\alpha^3+\alpha \overset{A}{=} 8\kappa+2\lambda$ $(\lambda\in Z)$
$=2\underbrace{(4\kappa+\lambda)}_{\rho\in Z}=2\rho$ ο άρτιος

Β΄ ΤΑΞΗ

Αν α περιττός: τότε $\alpha(\alpha^2+1)=\alpha^3+\alpha \overset{A}{=} 2\kappa+1+\alpha=2\kappa+1+2\lambda+1$
$=2\kappa+2\lambda+2=2\underbrace{(\kappa+\lambda+1)}_{\mu\in Z}=2\mu$ άρτιος

Θέμα 3ο

Α.

$$\begin{matrix} A(2\lambda-1,3\lambda+2) \\ A(x,y) \end{matrix}\left|\begin{matrix} x=2\lambda-1 \\ y=3\lambda+2 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} \lambda=\dfrac{x+1}{2} \\ y=3\cdot\dfrac{x+1}{2}+2 \end{matrix}\right|$$

Άρα το Α κινείται στην ευθεία:

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$$

Β.

λ=1: Α(1,5) $\vec{AB}=(0,-3)$

Β(1,2) $\vec{A\Gamma}=(1,-2)$

Γ(2,3)

$$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3$$

$$E=\frac{1}{2}|+3|=\frac{3}{2}\tau.\mu$$

Γ. Α(1,5) $\rho=d(A,B\Gamma)=\dfrac{|1-5+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$$\lambda_{B\Gamma}=\frac{3-2}{2-1}=1 \left|\begin{matrix} B\Gamma: y-2=x-1 \\ x-y+1=0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} (x-1)^2+(y-5)^2=\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ \textit{Ο ζητούμενος κύκλος} \end{matrix}\Bigg|$$
$B(1,2)$

Θέμα 4ο

$y^2=2px$, $p>0$ παραβολή

$4x^2+2y^2=3p^2$ έλλειψη

Α. Η εξίσωση της έλλειψης γίνεται

Β΄ ΤΑΞΗ

$$\frac{4x^2}{3p^2}+\frac{2y^2}{3p^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3p^2}{2}}=1 \overset{\frac{3p^2}{2}>\frac{3p^2}{4}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

Έχω $a^2=\frac{3p^2}{2}$

$\beta^2=\frac{3p^2}{4}$

Άρα $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=\frac{3p^2}{2}-\frac{3p^2}{4}=\frac{3p^2}{4}$

Δηλαδή $\gamma=\frac{\rho\sqrt{3}}{2}$

Οι εστίες: $E(0,\frac{\rho\sqrt{3}}{2})$ $\kappa\alpha\iota$ $E'(0,-\frac{\rho\sqrt{3}}{2})$

Β. $\begin{cases} y^2=2px \\ 4x^2+2y^2=3p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=2px \\ 4x^2+2\cdot 2px-3p^2=0 \end{cases}$ (Σ)

$\Delta=16p^2+48p^2=64p^2$

$x_{1,2}=\frac{-4p\pm 8p}{8}=\frac{p}{2},\ \frac{-3p}{2}$

$$(\Sigma)\begin{cases} y^2=2p\frac{p}{2}=p^2 \\ x=\frac{p}{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y^2=2p\left(-\frac{3}{2}p\right)=-3p^2<0 \text{ ΑΔΥΝΑΤΗ} \\ x=-\frac{3p}{2} \end{cases}$$

Άρα x=p/2, y=$\pm p$ οπότε τα σημεία είναι: Κ(p/2,p) και Λ(p/2,-p)

Εφαπτομένη της παραβολής ε_1

$yy_1=p(x+x_1)$ δηλαδή $\begin{cases} yp=p\left(x+\frac{p}{2}\right) \\ p>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+p/2 \\ \lambda\varepsilon_1=1 \end{cases}$

Εφαπτομένη της έλλειψης ε_2

$$\frac{x\frac{p}{2}}{\frac{3p^2}{4}}+\frac{yp}{\frac{3p^2}{2}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4px}{6p^2}+\frac{2y}{3p}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{3p}+\frac{2y}{3p}=1 \Leftrightarrow$$

$$2x+3y=3p \Leftrightarrow$$

$$x+y=\frac{3p}{2} \Leftrightarrow$$

$$y=-x+\frac{3p}{2}$$

$$\frac{xx_1}{\frac{3p^2}{4}}+\frac{yy_1}{\frac{3p^2}{2}}=1 \ \delta\eta\lambda$$

Β΄ ΤΑΞΗ

$\lambda_{\varepsilon_2}=-1$

$\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$ άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$